1.- Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuya ecuación es

$$x(t) = 0{,}3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$ donde x se mide en metros y t en segundos.

a) Determina la frecuencia, el período, la amplitud y la fase inicial del movimiento.
b) Calcula la aceleración y la velocidad de la partícula en el instante inicial.

a) *Comparando la ecuación* $x(t) = 0{,}3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ *con* $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_o)$ *obtenemos:*

$$\omega = 2\ rad/s\ ;\ T = \pi\, s;\ \ f = 1/\pi\ \ s^{-1}\ ;\ A = 0{,}3\ m\ =\ 30\ cm;\ \ \varphi_0 = \pi/6\ rad$$

b) $$v(t) = \frac{d\,x(t)}{d\,t} = -0{,}3\cdot 2\cdot sen\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad a(t) = \frac{d\,v(t)}{d\,t} = -0{,}3\cdot 4\cdot cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$v\,(0) = -0{,}6\ sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}3\ m/s \qquad a\,(0) = -1{,}2\ cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\ 1{,}04\ \ m/s^2$$

2.- Una partícula de masa m empieza su movimiento a partir del reposo, en la posición x = 25 cm y oscila alrededor de su posición de equilibrio (x = 0) con un período de 1,5 s.

Escribe las ecuaciones de la posición $x(t)$, la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ de la partícula en función del tiempo.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_o) \qquad A = 25\ cm;\ T = 1{,}5\ s\ ;\ \ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}5} = \frac{4\pi}{3}\ \ rad/s$$

$$x(t) = 25cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \varphi_o\right) \qquad x\,(0) = 25 = 25\ cos\ \varphi_0 \qquad cos\ \varphi_0 = 1\ \rightarrow\ \varphi_0 = 0$$

$$x(t) = 25cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)\ \ cm$$

$$v(t) = -100\ \frac{\pi}{3}sen\left(\frac{4\pi}{3}t\right)\ \ cm/s$$

$$a(t) = -400\ \frac{\pi^2}{9}cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)\ \ cm/s^2$$

3.- (*Andalucía 2007*).- Un cuerpo realiza un movimiento armónico simple:
a) Escribe la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $5\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2'5 cm.

$a_{máx} = 5\cdot\pi^2\ cm/s^2;\ \ T = 2\ s;\ \ x = 2'5\ cm.$ *para* $t = 0.$

$$a_{máx} = \omega^2 A \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ rad/s \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{máx} = A\pi^2 \\ a_{máx} = 5\pi^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = 5\,cm$$

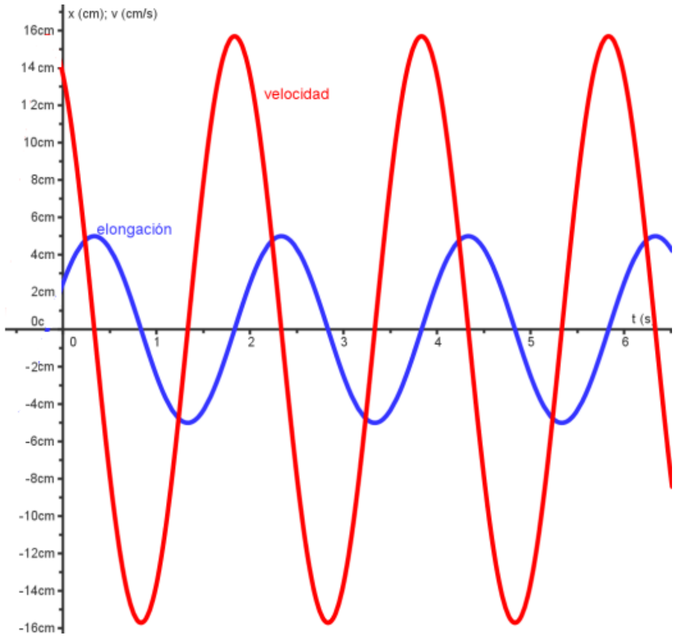
$$x = A\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{para t} = 0 \rightarrow \quad 2'5 = 5\mathrm{sen}(0 + \varphi_0) \Rightarrow \ \ \mathrm{sen}\,\varphi_0 = \frac{1}{2}\ \ \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

Ecuación del movimiento: $$x = 5\ \mathrm{sen}\left(\pi\,t + \frac{\pi}{6}\right)\ \ cm$$

b) Representa gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comenta la gráfica.

$$x = 5\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ cm \qquad v = \frac{dx}{dt} = 5\pi \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ cm/s$$



La velocidad se anula para valores máximos de la elongación y es máxima cuando la elongación se anula.

4.- Un objeto oscila según un movimiento armónico simple dado por $x = A\ sen\ (\omega t)$. Si el valor de la amplitud es 6 *cm*, y la aceleración del objeto cuando $x = -4\ cm$ es $24\ cm/s^2$, calcula:
a) La aceleración cuando $x = 1\ cm$.
b) La velocidad máxima que alcanza el objeto.

a) $x = A\ sen\ (\omega t)$ $\quad a = -A\ \omega^2\ sen\ (\omega t) = -\omega^2 x$

$x = -4\ cm \quad a = 24\ cm/s^2$

$24 = -\omega^2 (-4) \rightarrow \omega^2 = 6 \qquad \omega = \sqrt{6}\ rad/s$

cuando $x = 1\ cm \rightarrow a = -\omega^2 x = -6 \cdot 1 = -6\ cm/s^2$

b) $\quad v = A\ \omega \cos\ (\omega t) \qquad v_{máx} = A\ \omega = 6\sqrt{6}\ \ cm/s$

5.- Una partícula realiza un movimiento vibratorio armónico simple. Escribe la ecuación del movimiento en unidades del S.I. en los siguientes casos:
a) Su aceleración máxima es igual a $5\pi^2\ cm/s^2$, el período vale 2 *s* y la elongación del punto al iniciarse el moviendo es igual a 2,5 *cm*.

$x = A\ sen\ (\omega t + \varphi_o) \qquad v = A\ \omega \cos\ (\omega t + \varphi_o) \qquad a = -A\ \omega^2\ sen\ (\omega t + \varphi_o) = -\omega^2 x$

$$\left.\begin{array}{ll} a_{máx} = A\omega^2 & 5\pi^2 = A\omega^2 \\ T = 2s & \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \end{array}\right\} A = 5cm$$

$$x(0) = A sen\varphi_o \rightarrow 2{,}5 = 5 sen\varphi_o \qquad sen\ \varphi_o = \frac{1}{2} \qquad \varphi_o = \frac{\pi}{6}$$

Ecuación del movimiento: $x(t) = 0{,}05\ sen\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ m$

b) Su velocidad es 3 *cm/s* cuando la elongación es 2,4 *cm* y la velocidad es 2 *cm/s* cuando su elongación es 2,8 *cm*.

La elongación al iniciarse el movimiento era nula: $x(0) = 0 \Rightarrow \varphi_o = 0$

$x(t) = A\,sen\,(\omega t)$ $\quad 2{,}4 = A\,sen\,(\omega t_1)$ $\quad 2{,}8 = A\,sen\,(\omega t_2)$

$v(t) = A\,\omega\cos(\omega t)$ $\quad 3 = A\,\omega\cos(\omega t_1)$ $\quad 2 = A\,\omega\cos(\omega t_2)$

$$sen\,(\omega t_1) = \frac{2{,}4}{A} \qquad \cos(\omega t_1) = \frac{3}{A\omega} \qquad sen^2(\omega t_1) + \cos^2(\omega t_1) = 1 = \frac{2{,}4^2}{A^2} + \frac{3^2}{A^2\omega^2}$$

$$sen\,(\omega t_2) = \frac{2{,}8}{A} \qquad \cos(\omega t_2) = \frac{2}{A\omega} \qquad sen^2(\omega t_2) + \cos^2(\omega t_2) = 1 = \frac{2{,}8^2}{A^2} + \frac{2^2}{A^2\omega^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^2\omega^2 = 2{,}4^2\omega^2 + 9 \\ A^2\omega^2 = 2{,}8^2\omega^2 + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega\, 1{,}55\, rad/s \qquad A = 3{,}08\,cm$$

Ecuación del movimiento: $x(t) = 0{,}0308\, sen\,(1{,}55\,t)\ m$

6 (*La Rioja*).- Un muelle, cuya masa consideramos despreciable, tiene una longitud natural L_o = 20 *cm*. Cuando de su extremo inferior se cuelga un cuerpo de masa $M = 0{,}1$ *kg*, la longitud en equilibrio del muelle es $L_e = 30$ *cm*.

a) Calcula la constante recuperadora, k del muelle. Considera $g = 10\ m/s^2$.

b) Partiendo de la posición de equilibrio anterior, se desplaza M hacia arriba 10 *cm*, es decir, hasta que el muelle recupera su longitud natural. A continuación, se suelta M con velocidad inicial nula, de forma que empieza a oscilar armónicamente en dirección vertical.

Calcula la longitud máxima del muelle en el punto más bajo de la oscilación.

c) Calcula la amplitud y la frecuencia de la oscilación, y la velocidad de M cuando pasa por su posición de equilibrio.

a) $\vec{F} = -k\vec{x}$ $\qquad k = \frac{\vec{F}}{-\vec{x}} = \frac{-mg}{-x} = \frac{0{,}1 \cdot 10}{0{,}1} =$ $k = 10\ N/m$

b) M realiza un m.a.s. de amplitud $A = 10$ *cm*

La longitud en el punto más bajo será $L_{máx} = L_e + A =$ 40 *cm*

c) $x = A\,sen\,(\omega t)$ $\qquad A = 10\ cm$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}1}} = 10\,rad/s$

$$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}\,Hz$$

$v = A\,\omega\cos(\omega t)$ *Cuando M pasa por la posición de equilibrio, la velocidad es máxima* $v = A\,\omega = 0{,}1 \cdot 10 = 1\ m/s$

7.- Una partícula de masa $m = 0{,}1$ *kg* oscila armónicamente en la forma $x = A$ sen (ωt), con una amplitud $A = 0{,}2$ *m* y una frecuencia angular $\omega = 2\pi$ *rad/s*.

a) Calcula la energía mecánica de la partícula.

$x = A$ sen (ωt) $\qquad v = -A\,\omega\cos(\omega t)$ $\qquad k = \omega^2 m$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2(\omega t)$$

Y, sacando factor común: $E_m = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (2\pi)^2 = 0{,}08\,\pi^2\ J$

b) $k = \omega^2 m \quad \rightarrow \quad E_m = \dfrac{1}{2} k A^2$

$E_p = \dfrac{1}{2} k x^2 \qquad E_c = E_m - E_p = \dfrac{1}{2} k A^2 - \dfrac{1}{2} k x^2 = \dfrac{1}{2} k (A^2 - x^2)$

$E_p = \dfrac{1}{2} k x^2 = 0{,}2 \cdot \pi^2 \cdot x^2 \qquad E_c = \dfrac{1}{2} k (A^2 - x^2) = 0{,}2 \cdot \pi^2 \cdot (0{,}2^2 - x^2)$